TD$_8$ – Algèbre bilinéaire

Exercice 1 ★

Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 ★★

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions de E telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.

1. Montrer que, pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$
2. En déduire que, si f et g appartiennent à E_2 alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ converge
3. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
4. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ de $E_2\times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
   Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2

Exercice 3 Un analogue pour les suites ★★

Soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2$ converge.

1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ de $E_2\times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2

Exercice 4 ★★

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.
2. On considère à présent l'ensemble $E = \{P\in\mathbb{R}_4[X] : P(0) = P(4) = 0\}$.
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Montrer que $E = \{X(X-4)Q,\ Q\in\mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base et la dimension de E.
3. On définit une famille (M_1, M_2, M_3) de $\mathbb{R}_4[X]$ par $P_1 = (X-2)(X-3)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$, $P_3 = (X-1)(X-2)$.
   On pose alors $M_i = X(X-4)P_i$.
   (a) Montrer que pour tout $i\in[\![1,3]\!]$, $M_i(i)\neq 0$. On pose alors $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)}M_i$.
   (b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée de E.
   (c) En déduire que pour $P\in E$, on a $P = P(1)N_1 + P(2)N_2 + P(3)N_3$.

Exercice 5 ★★★

Soit E un espace euclidien. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de E.

Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe

Exercice 6 ★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 7 ★

Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ la famille (a_1, a_2, a_3)

1. avec $a_1 = (0, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$;
2. avec $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, -1)$, $a_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 8 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ★★★

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$
2. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.
3. $E = \mathbb{R}^4, F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$, produit scalaire canonique.
4. $E = \mathbb{R}[X], F = \mathrm{Vect}(X^2 + 1, X^3 + 1), \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{0}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 9 ★

Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est orthogonale.
2. On pose $e_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right), e_2 = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right), e_3 = \left(0, 0, \frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right), e_4 = \left(0, 0, \frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Exercice 10 ★

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de $F^\perp$ dans les deux cas suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, -2), (0, 1, 3, 2))$
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ et } x - y - t = 0\}$

Exercice 11 ★★★

Soit E un espace euclidien et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 12 ★★

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace euclidien E. Montrer que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 13 Vecteur normal à un hyperplan ★★

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on pose $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+3y-z+t=0\}$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ tel que $x \in F \Leftrightarrow \langle x, u \rangle = 0$.
2. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur F ainsi que sa matrice dans la base canonique.

Exercice 14 ★★★

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$. Soit p l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $p(M) = \dfrac{M+M^\top}{2}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que p est un projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer son image et son noyau.
3. Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Calculer $\min\limits_{A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$. Même question si M est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 15 Calcul de projetés orthogonaux ★★

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de X^2+X+1 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3+X^2+X+1 sur $F = \mathrm{Vect}(X^3+X, X^2, 1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^2-1 sur $F = \mathrm{Vect}(1+X, X^2-X)$.

Exercice 16 ★★★

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$
2. On se place désormais dans le cas $n = 2$.
   (a) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ,\ P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel. En donner une base.
   (b) Déterminer une base orthonormée de F
   (c) Déterminer la distance de X^2 à F.

Exercice 17 ★★★

Dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $2x+y+z=0$. Déterminer une base orthonormée de P, la matrice de la projection orthogonale sur P dans la base canonique et le projeté orthogonal de $v = (1,-3,2)$.

Exercice 18 ★

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $P : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{array} \right.$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P.

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★★
(*Oral 2018*)

On définit la suite de polynômes (H_n) par $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $H_n = 2XH_{n-1} - H_{n-2}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, le polynôme H_n est de degré n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $H_n(\cos(\theta))$.
3. Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (On pensera bien à justifier la convergence d'une telle intégrale impropre).
4. Montrer que (H_n) est une suite orthogonale pour ce produit scalaire

Exercice 20 ★★★
(*Oral 2018*)

Pour quelles valeurs de x et y réels l'intégrale $I(x, y) = \displaystyle\int_0^{\pi} (t^2 + x\cos(t) + y)^2\,\mathrm{d}t$ est elle minimale ?

Exercice 21 ★★★
(*Oral 2016*)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On définit le plan F par l'équation $x + 2y + 2z = 0$. On pose p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F.

1. Déterminer une base orthonormale de F. La compléter en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
2. Donner les matrices de p et s dans la base canonique.
3. Donner les matrices de p et s dans la base de la question 1.

Exercice 22 ★★★
(*Oral 2006, 2018*)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^\top N)$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Décomposer $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\varphi : M \mapsto M - 2\dfrac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A)}A$ est une symétrie orthogonale.

Exercice 23 ★★★
(*Oral 2012, 2016*)

Pour $(P, Q) \in E = \mathbb{R}_2[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est une base orthogonale de E puis en déduire une base orthonormée $\mathcal{C}$.
3. On définit $f : P \mapsto P(1 - X)$. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}. Que peut-on dire de f ?
4. f est-elle une symétrie orthogonale ?

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. Alors

$$\langle Q,P\rangle = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle.$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
Soient $P,Q,R \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda P+Q,R\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda P(t)+Q(t))R(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t\\ &=\lambda\int_{-1}^{1} P(t)R(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t\\ &=\lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire symétrique.

Rédaction

Pour conclure que linéaire à gauche implique bilinéaire, il faut impérativement avoir prouvé auparavant la symétrie.

Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction $t \mapsto P(t)^2(1-t^2)$ est positive sur $[-1,1]$, $\langle P,P\rangle \geqslant 0$.
Enfin, si $\langle P,P\rangle = 0$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = 0$. Mais la fonction $t \mapsto P(t)^2(1-t^2)$ est continue et positive sur $[-1,1]$. C'est donc la fonction nulle, et ainsi,

Remarque

La continuité est fondamentale ici.

$$\forall t \in [-1,1], P(t)^2(1-t^2) = 0.$$

Mais pour $t \in]-1,1[$, $1-t^2 \neq 0$ donc $P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$.
P possède donc une infinité de racines : P est le polynôme nul.

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$.
   En développant cela donne
   $$|x|^2 - 2|x|\,|y| + |y|^2 \geqslant 0$$
   D'où
   $$|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$
2. Soit $(f,g) \in E_2^2$, on a alors
   $$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad 0 \leqslant |f(x)g(x)| \leqslant \frac{f(x)^2+g(x)^2}{2}$$
   Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x$ convergent donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)^2+g(x)^2}{2}\,\mathrm{d}x$ converge.
   Par théorème de comparaison pour les intégrales des fonctions positives on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est ainsi absolument convergente donc convergente.

3. La fonction identiquement nulle appartient clairement à E_2, ainsi E_2 est non-vide.

   Soit $(f,g) \in E_2^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors, pour $x \in [0,+\infty[$
$$\begin{aligned}(f(x)+\lambda g(x))^2 &= f(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g(x)^2\\ &\leqslant f(x)^2 + |2\lambda f(x)g(x)| + \lambda^2 g(x)^2\\ &\leqslant f(x)^2 + |\lambda|(f(x)^2+g(x)^2) + \lambda^2 g(x)^2\end{aligned}$$
   Ainsi
$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad 0 \leqslant (f(x)+\lambda g(x))^2 \leqslant (1+|\lambda)f(x)^2 + (|\lambda|+\lambda^2)g(x)^2$$
   Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x$ convergent donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1+|\lambda)f(x)^2+(|\lambda|+\lambda^2)g(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.

   Par théorème de comparaison pour les intégrales des fonctions positives on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |(f(x)+\lambda g(x))^2|\,\mathrm{d}x$ converge. Ainsi $f+\lambda g \in E_2$.

   Finalement E_2 est bien un sous-espace vectoriel de E.
4. Soit $(f_1,f_2,g) \in E_2^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\begin{aligned}\langle f_1+\lambda f_2, g\rangle &= \int_0^{+\infty}(f_1(x)+\lambda f_2(x))g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} f_1(x)g(x)+\lambda f_2(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} f_1(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^{+\infty} f_2(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \langle f_1,g\rangle + \lambda\langle f_2,g\rangle\end{aligned}$$
   L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc linéaire à gauche.

   Soit $(f,g) \in E_2^2$, alors
$$\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle$$
   L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc symétrique. Puisqu'elle est linéaire à gauche et symétrique elle est donc aussi linéaire à droite et ainsi elle est bilinéaire.

   Soit $f \in E_2$, on a alors $\langle f,f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Comme f^2 est positive sur $[0,+\infty[$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et donc $\langle f,f\rangle = 0$.

   L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc une forme bilinéaire positive.

   Soit enfin $f \in E_2$ telle que $\langle f,f\rangle = 0$, on a alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   La fonction f^2 est alors une fonction $\boxed{\textit{positive et continue}}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ d'intégrale nulle sur cet intervalle. Ainsi elle est nulle sur $[0,+\infty[$, i.e. $f = 0_{E_2}$.

   Finalement l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire définie positive sur E_2, c'est-à-dire un produit scalaire.

Corrigé de l'exercice 3

1. La suite constante égale à 0 appartient à E_2 donc E_2 est non-vide. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $(u_n+\lambda v_n)^2 \geqslant 0$ et
$$(u_n+\lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2 \leqslant u_n^2 + |\lambda|(u_n^2+v_n^2) + \lambda v_n^2$$
   On sait que les séries de termes généraux $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Ainsi par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs on en déduit que la série de terme général $\left((u_n+\lambda v_n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, i.e. $u+\lambda v \in E_2$.

   Finalement E_2 est bien un sous-espace vectoriel de E

2. $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\langle u+\lambda v, w\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+\lambda v_n)w_n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \lambda v_n w_n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n\\ &= \langle u, w\rangle + \lambda\langle v, w\rangle\end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est donc linéaire à gauche.

Soit $(u, v) \in E_2^2$, alors
$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = \langle v, u\rangle$$

L'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est donc symétrique. Puisqu'elle est linéaire à gauche et symétrique elle est donc aussi linéaire à droite et ainsi elle est bilinéaire.

Soit $u \in E_2$, on a alors $\langle u, u\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant 0$.

L'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est donc une forme bilinéaire positive.

Soit enfin $u \in E_2$ telle que $\langle u, u\rangle = 0$, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^2 = 0$$

La suite u est donc la suite constante égale à 0, i.e. $u = 0_E$ Finalement l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire définie positive sur E_2, c'est-à-dire un produit scalaire.

Corrigé de l'exercice 4

1. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_4[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + Q, R\rangle &= \sum_{i=0}^{4}(\lambda P + Q)(i)R(i)\\ &= \lambda\sum_{i=0}^{4} P(i)R(i) + \sum_{i=0}^{4} Q(i)R(i)\\ &= \lambda\langle P, Q\rangle + \langle Q, R\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
De plus, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$, on a
$$\langle Q, P\rangle = \sum_{i=0}^{4} Q(i)P(i) = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i) = \langle P, Q\rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est symétrique, étant déjà linéaire à gauche, elle est donc bilinéaire.
Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a
$$\langle P, P\rangle = \sum_{i=0}^{4} P(i)^2 \geqslant 0.$$

Enfin, $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si $\forall i \in [\![0, 4]\!]$, $P(i)^2 = 0 \Leftrightarrow P(i) = 0$.
Mais un polynôme de degré au plus 4 qui possède 5 racines est nécessairement le polynôme nul, donc $\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0$.
Et donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

Il y a bien 5 nombres dans $[\![0, 4]\!]$.

2. (a) Nous pourrions bien entendu le prouver « à la main »comme d'habitude.
Préférons tout de même noter que $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$, car noyau de la forme linéaire non-nulle $P \mapsto P(0)$. C'est donc en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
De même, $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(4) = 0\}$ est un hyperplan.
Et donc $E = E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ car intersection de deux sous-espaces vectoriels.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Alors $P \in E$ si et seulement si 0 et 4 sont des racines de P, donc si et seulement si P est divisible par $X(X-4)$.
Donc si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X-4)Q$.

P étant de degré au plus 4, nécessairement Q est de degré au plus 2 et donc $E = \{X(X-4)Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$.
Puisque tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit de manière unique $Q = aX^2 + bX + c$, tout polynôme de E s'écrit de manière unique $P = aX^3(X-4) + bX^2(X-4) + cX(X-4)$.
Ainsi $X^3(X-4), X^2(X-4), X(X-4)$ est une base de E, qui est donc de dimension 3.

3. (a) Il est clair que les racines de M_i sont tous les entiers de 0 à 4, sauf i, et donc i n'étant pas racine de M_i, $M_i(i) \neq 0$.

(b) Pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on a

$$\langle N_i, N_j\rangle = \left\langle \frac{1}{M_i(i)} M_i, \frac{1}{M_j(j)} M_j \right\rangle = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \langle M_i, M_j\rangle.$$

Or, $\langle M_i, M_j\rangle = \sum_{k=0}^{4} M_i(k)M_j(k)$.
Mais $M_i(k) = 0$ si $k \neq i$, donc $\langle M_i, M_j\rangle = M_i(i)M_j(i)$.
Si $i \neq j$, on a alors $M_j(i) = 0$, donc $\langle N_i, N_j\rangle = 0$.
Et si $i = j$, alors $\langle M_i, M_i\rangle = \frac{1}{M_i(i)^2} M_i(i)^2 = 1$.
Et donc (M_1, M_2, M_3) est une famille orthonormée de E. En particulier, elle est libre.
Étant de cardinal $3 = \dim E$, c'est une base de E.

(c) Puisque (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée de E, tout polynôme P s'écrit

$$P = \langle P, N_1\rangle + \langle P, N_2\rangle N_2 + \langle P, N_3\rangle N_3.$$

Or, pour $i \in [\![1,3]\!]$, $\langle P, N_i\rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)N_i(k) = P(i)N_i(i) = P(i)\frac{M_i(i)}{M_i(i)} = P(i)$.

Détails

Nous avons (encore) utilisé le fait que $N_i(k) = 0$ si $k \neq i$.

Et donc $P = P(1)N_1 + P(2)N_2 + P(3)N_3$.

Corrigé de l'exercice 5

Soient $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \ldots, x_n \in F_n$ tels que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0_E.$$

Alors, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\langle x_i, x_1 + x_2 + \cdots + x_n\rangle = \langle x_i, 0_E\rangle = 0.$$

Or, par linéarité à droite du produit scalaire, on a également

$$\langle x_i, x_1\rangle + \cdots + \langle x_i, x_n\rangle = 0.$$

Mais les F_i étant deux à deux orthogonaux par hypothèse, on a $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.
On en déduit que $\|x_i\|^2 = \langle x_i, x_i\rangle = 0$, et donc nécessairement $x_i = 0_E$.
Ceci étant vrai pour tout i, on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$: les F_i sont en somme directe.

Corrigé de l'exercice 6

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on pose $b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } ai < 0 \end{cases}$.

Alors, pour $i \in [\![1,n]\!]$ on a $a_i b_i = |a_i|$.

Posons $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et $b = (b_1, \cdots b_n)$. Alors

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

Et

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \qquad \text{et} \qquad \|b\| = \sqrt{n}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous assure que $\langle a, b\rangle \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$, c'est-à-dire

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Corrigé de l'exercice 7

1. On pose $b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{a_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

   On pose ensuite

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_2 - \langle a_2, b_1\rangle b_1}{\|a_2 - \langle a_2, b_1\rangle b_1\|} \\ &= \frac{(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)}{\left\|(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)\right\|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2,-1,1)}{\frac{1}{2}\|(2,-1,1)\|} \\ &= \frac{(2,-1,1)}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

   Puis

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{a_3 - \langle a_3, b_1\rangle b_1 - \langle a_3, b_2\rangle b_2}{\|a_3 - \langle a_3, b_1\rangle b_1 - \langle a_3, b_2\rangle b_2\|} \\ &= \frac{(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{6}(2,-1,1)}{\left\|(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{6}(2,-1,1)\right\|} \\ &= \frac{\frac{1}{6}(4,4,-4)}{\frac{1}{6}\|(4,4,-4)\|} \\ &= \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

   La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\right)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de (a_1, a_2, a_3).

2. On pose $b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{a_1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}(1,-2,2)$

   On pose ensuite

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_2 - \langle a_2, b_1\rangle b_1}{\|a_2 - \langle a_2, b_1\rangle b_1\|} \\ &= \frac{(-1,0,-1) - \frac{-3}{9}(1,-2,2)}{\left\|(-1,0,-1) - \frac{-3}{9}(1,-2,2)\right\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(-2,-2,-1)}{\frac{1}{3}\|(-2,-2,-1)\|} \\ &= \frac{1}{3}(-2,-2,-1) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{a_3 - \langle a_3, b_1\rangle b_1 - \langle a_3, b_2\rangle b_2}{\|a_3 - \langle a_3, b_1\rangle b_1 - \langle a_3, b_2\rangle b_2\|} \\
&= \frac{(5,-3,7) - \frac{25}{9}(1,-2,2) - \frac{-11}{9}(-2,-2,-1)}{\left\|(5,-3,7) - \frac{25}{9}(1,-2,2) - \frac{-11}{9}(-2,-2,-1)\right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{9}(-2,1,2)}{\left\|\frac{1}{9}(-2,1,2)\right\|} \\
&= \frac{1}{3}(-2,1,2)
\end{aligned}$$

La famille $\left(\frac{1}{3}(1,-2,2), \frac{1}{3}(-2,-2,-1), \frac{1}{3}(-2,1,2)\right)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de (a_1, a_2, a_3).

Corrigé de l'exercice 8

1. On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on obtient

$$P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_1 = \frac{X - \langle X, P_0\rangle P_0}{\|X - \langle X, P_0\rangle P_0\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}X$$

$$P_2 = \frac{X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 - \langle X^2, P_1\rangle P_1}{\|X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 - \langle X^2, P_1\rangle P_1\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

2. On obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. On obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,-1,2)$$

4. On obtient

$$\sqrt{\frac{15}{28}}(X^2+1), \frac{\sqrt{7}}{2}(16X^3 - 15X^2 + 1)$$

Corrigé de l'exercice 9

1. C'est du cours.
2. On calcule tous les produits scalaire $\langle e_i, e_j\rangle$.

   On en déduit que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est orthonormée. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille orthonormée de cardinal 4 dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, c'est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
3. Nous savons que

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 & 0\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ 0 & 0 & \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

   On sait que $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Les deux bases étant orthonormées, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est une matrice orthogonale, et donc son inverse est facile à calculer : il s'agit de sa transposée :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ 0 & 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 10

1. On sait que $(x,y,z,t) \in F^\perp$ si et seulement si $\begin{cases} \langle (x,y,z,t), e_1\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t), e_2\rangle = 0 \end{cases}$. Ainsi, on a

$$F^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-2t = 0 \text{ et } y+3z+2t = 0\}.$$

Nous avons donc répondu à la question, mais allons un peu plus loin en déterminant une base de $F^\perp$: $(x,y,z,t) \in F^\perp$ si et seulement si

$$\begin{cases} x+y-2t = 0 \\ y+3z+2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t-y \\ y = -3z-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z+4t \\ y = -2z-2t \end{cases}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in F^\perp &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (3z+4t, -3z-2t, z, t) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}((3,-3,1,0),(4,-2,0,1)). \end{aligned}$$

Remarque

On a obtenu ici une base de $F^\perp$ parmi d'autres, il y a, comme d'habitude, une infinité de bases de $F^\perp$.

Ainsi, $F^\perp = \mathrm{Vect}((3,-3,1,0),(4,-2,0,1))$.

2. Commençons par déterminer une base de E. On a

$$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+t = 0 \\ x-y-t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ t = x-y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,2x,x-y) \in \mathrm{Vect}((1,0,2,1),(0,1,0,-1)).$$

Cette famille génératrice de F étant formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre et donc il s'agit d'une base de F.
Ainsi, un vecteur $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ est dans $F^\perp$ si et seulement si

Astuce

Si on veut gagner du temps, on peut noter qu'un vecteur est dans F si et seulement si il est orthogonal à $(1,1-1,1)$ et à $(1,-1,0,-1)$: ceci se voit directement sur les deux équations définissant F.
Autrement dit, en notant G le sous-espace engendré par ces deux vecteurs, $F = G^\perp$.
Et donc $F^\perp = (G^\perp)^\perp = G$!

$$\begin{cases} \langle (x,y,z,t), (1,0,2,1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t), (0,1,0,-1)\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+t = 0 \\ y-t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t-2z \\ y = t \end{cases}$$

On en déduit que

$$(x,y,z,t) \in F^\perp \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-t-2z, t, z, t) \Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}((-2,0,1,0),(-1,1,0,1)).$$

On vérifie aisément que cette famille est libre, et donc que c'est une base de $F^\perp$.
Notons qu'on obtient alors $F^\perp$ de dimension 2, ce qui est cohérent avec

$$\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F.$$

Corrigé de l'exercice 11

1. On va procéder par double inclusion

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ et $y \in F+G$, on peut alors écrire $y = y_F + y_G$ avec $y_F \in F$ et $y_G \in G$,

Comme $x \in F^\perp$ on a $\langle x, y_F\rangle = 0$ et, comme $x \in G^\perp$ on a $\langle x, y_G\rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y\rangle x, y\rangle = 0$.

x est orthogonal à tout élément de $F+G$ donc $x \in (F+G)^\perp$.
On a donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
Soit maintenant $z \in (F+G)^\perp$, ainsi

$$\forall u \in F,\ \forall v \in G, \qquad \langle z, u+v\rangle = 0$$

En prenant en particulier $u = 0$ ou $v = 0$ on obtient

$$\forall u \in F, \qquad \langle z, u\rangle = 0$$

$$\forall v \in G, \qquad \langle z, v\rangle = 0$$

Ainsi $z \in F^\perp$ et $z \in G^\perp$ et donc $z \in F^\perp \cap G^\perp$
On a donc $F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ et ainsi $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

2. Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E, on applique le résultat précédent à $A^\perp$ et $B^\perp$, on a donc
$$(A^\perp + \mathscr{B}^\perp)^\perp = (A^\perp)^\perp \cap (B^\perp)^\perp$$
Comme on A et B sont des sous-espace vectoriels de l'espace euclidien E on a $(A^\perp)^\perp = A$ et $(B^\perp)^\perp = B$, d'où
$$(A^\perp + \mathscr{B}^\perp)^\perp = A \cap B$$
En passant à l'orthogonal on obtient, puisque $A^\perp + \mathscr{B}^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E
$$A^\perp + \mathscr{B}^\perp = (A \cap B)^\perp$$
Ce qui est le résultat voulu.

Corrigé de l'exercice 12

Puisque F et G sont supplémentaires, on a $\dim F + \dim G = \dim E$. Et donc

$$\dim F^\perp + \dim G^\perp = \dim E - \dim F + \dim E - \dim G = 2\dim E - \dim E = \dim E.$$

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Puisque $E = F \oplus G$, x s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
Mais alors
$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x_F + x_G, x\rangle = \langle x_F, x\rangle + \langle x_G, x\rangle.$$
Mais puisque $x \in F^\perp$ et $x_F \in F$, il vient $\langle x_F, x\rangle = 0$. Et de même $\langle x_G, x\rangle = 0$.
On en déduit que $\|x\| = 0$ et donc $x = 0_E$.
Ainsi, nous venons de prouver que $F^\perp \cap G^\perp = \{0_E\}$.
Combiné à l'égalité précédemment prouvée sur les dimensions, cela prouve que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Puisque F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : (x,y,z,t) \mapsto 2x+3y-z+t$.
Et donc étant le noyau d'une forme linéaire, c'est un hyperplan.
D'après la question précédente, nous pouvons prendre pour u une base de $F^\perp$.
Or, ce $F^\perp$ étant de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur non nul de $F^\perp$: ce sera automatiquement une base de $F^\perp$.
Mais pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a
$$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow 2x+3y-z+t = 0 \Leftrightarrow \langle (x,y,z,t), (2,3,-1,1)\rangle = 0.$$
Et donc $u = (2,3,-1,1)$ est dans $F^\perp$, et donc est une base de $F^\perp$.
Remarque : *notons que dans le cas d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, cette notion a déjà été rencontrée : il s'agit de celle de vecteur normal.*
Par exemple, si $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z = 0\}$, alors $u = (1,1,-2)$ est précisément ce qu'on appelait vecteur normal à F en terminale. Autrement dit, pour se donner un plan dans l'espace, il suffit de se donner un vecteur normal au plan.

Ici on parle de plan vectoriel, c'est-à-dire de sous-espace vectoriel, donc qui passe nécessairement par $(0,0,0)$.

2. $u = (2, 3, -1, 1)$ est une base de $F^\perp$, ainsi la projection orthogonale sur $F^\perp$ est l'application

$$p_{F^\perp} : (x, y, z, t) \mapsto \frac{\langle (x, y, z, t), (2, 3, -1, 1)\rangle (2, 3, -1, 1)}{\|(2, 3, -1, 1)\|}$$

C'est-à-dire

$$p_{F^\perp} : (x, y, z, t) \mapsto \frac{1}{15}(4x + 6y - 2z + 2t, 6x + 9y - 3z + 3t, -2x - 3y + z - t, 2x + 3y - z + t)$$

Et donc

$$p_F : (x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, t) - p_{F^\perp}((x, y, z, t))$$

C'est-à-dire

$$p_F : (x, y, z, t) :\mapsto \frac{1}{15}(11x-6y+2z-2t, -6x+6y+3z-3t, 2x+3y+14z+t, -2x-3y+z+14t)$$

On peut alors donner la matrice de p_F dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p_F) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & -6 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 14 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 14

1. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\langle \lambda A+B, C\rangle = \mathrm{Tr}((\lambda A + B)^\top C) = \mathrm{Tr}(\lambda A^\top C+B^\top C) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A^\top C)+\mathrm{Tr}(B^\top C) = \lambda\langle A, C\rangle+\langle B, C\rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \mathrm{Tr}\left((A^\top B)^\top\right) = \mathrm{Tr}(B^\top A) = \langle B, A\rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est symétrique, donc bilinéaire symétrique.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} \left(A^\top A\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A^\top)_{i,j}A_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0.$$

Et une somme de carrés étant nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, il vient alors

$$\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Et donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Il est évident que p est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Et on a alors, pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$p^2(M) = p\left(\frac{M+M^\top}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{M+M^\top}{2} + \left(\frac{M+M^\top}{2}\right)^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{M+M^\top+M^\top+M}{2}\right) = \frac{M+M^\top}{2} = p(M).$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il vient $p^2 = p$, et donc p est un projecteur.
On a alors $M \in \mathrm{Ker}(p) \Leftrightarrow \dfrac{M+M^\top}{2} = 0 \Leftrightarrow M^\top = -M$.
Et donc $\mathrm{Ker}(p)$ est l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.
D'autre part, nous savons que pour tout projecteur, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$.
Et donc $M \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(M) = M \Leftrightarrow \dfrac{M+M^\top}{2} = M \Leftrightarrow M = M^\top$.
Ainsi $\mathrm{Im}(p)$ est l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

Remarque

Ceci prouve donc que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puisque l'image et le noyau d'un projecteur sont toujours supplémentaires.

3. Il s'agit de prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
Or, puisque nous savons déjà que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors
$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$
D'autre part, pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\langle A, S\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^\top S\right) = -\mathrm{Tr}(AS) = -\mathrm{Tr}(SA) = -\mathrm{Tr}(S^\top A) = -\langle S, A\rangle = -\langle A, S\rangle.$$
On en déduit que $\langle A, S\rangle = 0$. Et donc toute matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale à toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
Ces deux espaces étant de même dimension : ils sont égaux, et donc p est la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
4. Nous savons que le minimum cherché existe, et est égal à la distance entre M et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Ce minimum est $\|q(M) - M\|$, où q est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Mais $q = \mathrm{Id} - p$. Et donc $q(M) - M = -p(M) = -\dfrac{M + M^\top}{2}$.
On en déduit que le minimum cherché est $\left\|\dfrac{M + M^\top}{2}\right\| = \dfrac{1}{2}\|M + M^\top\|$.
Or, $M + M^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que
$$\|M + M^\top\|^2 = 4 + 2(n-1) = 2n + 2.$$
Et donc le minimum cherché est $\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$.

Si M est la matrice dont tous les coefficients valent 1, alors $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(q)$, et donc $q(M) = 0$.
On en déduit que le minimum cherché est $\|M\| = \sqrt{n^2} = n$.

Remarque

La formule prouvée dans la question 1. pour $\langle A, A\rangle$ permet d'obtenir facilement $\|A\|^2$ en fonction des coefficients de A : c'est la somme des carrés des coefficients.

Corrigé de l'exercice 15

1. Une base de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(1, X)$.
Le projeté orthogonal de $P = X^2 + X + 1$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ s'écrit $aX + b$, et on doit avoir $X^2 + X + 1 - p_F(P) \in F^\perp$ donc
$$\langle X^2 + X + 1 - aX - b, 1\rangle = \int_0^1 (t^2 + (1-a)t + (1-b))dt = \frac{1}{3} + \frac{1-a}{2} + 1 - b = 0$$
De même
$$\langle X^2 + X + 1 - p_F(P), X\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1-a}{3} + \frac{1-b}{2} = 0$$
et donc a et b sont solutions du système
$$\begin{cases} 2 + 3(1-a) + 6(1-b) = 0 \\ 3 + 4(1-a) + 6(1-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6b = 11 \\ 4a + 6b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$
et donc
$$p_F(P) = 2X + \frac{5}{6}.$$
2. Notons que
$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X^3 + X) + X^2 + 1 \in F, \text{ et donc } p_F(X^3 + X^2 + X + 1) = X^3 + X^2 + X + 1.$$

Remarque

Comme pour tous les projecteurs, si $x \in \mathrm{Im}\, p$, alors $p(x) = x$.

3. Notons $P = X^2 - 1$, et soit $p_F(P) = a(1+X) + b(X^2 - X)$. Alors comme précédemment, on obtient le système

$$\begin{cases} 4(1-b) - 6(a-b) - 12(1+a) + 3(1-b) - 4(a-b) - 6(1+a) = 0 \\ 12(1-b) - 15(a-b) - 20(1+a) - 15(1-b) + 20(a-b) + 30(1+a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -28a + 3b = 11 \\ 15a - 2b = -7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{11} \\ b = \dfrac{31}{11} \end{cases}$$

On en déduit que $p_F(x) = -\dfrac{20}{11}X^2 + \dfrac{32}{11}x - \dfrac{10}{11}$.

Corrigé de l'exercice 16

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. Alors

$$\varphi(Q, P) = Q(0)P(0) + \int_{-1}^{1} Q'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t = P(0)Q(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(P, Q)$$

Donc φ est symétrique.
Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q, R) =& (\lambda P + Q)(0)R(0) + \int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)'(t)R'(t)\,\mathrm{d}t \\ =& \lambda P(0)R(0) + Q(0)R(0) + \lambda \int_{-1}^{1} P'(t)R'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q'(t)R'(t)\,\mathrm{d}t \\ =& \lambda\varphi(P, R) + \varphi(Q, R)\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire symétrique.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

$$\varphi(P, P) = P(0)^2 + \int_{-1}^{1} P'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $P(0)^2 \geqslant 0$ et que la fonction $t \mapsto P'(t)^2$ est positive sur $[-1, 1]$, $\langle P, P\rangle \geqslant 0$. Enfin, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $P(0)^2 + \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement chaque terme est nul, ainsi $P(0) = 0$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$

Mais la fonction $t \mapsto P'(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$. C'est donc la fonction nulle, et ainsi,

> **Remarque**
> La continuité est fondamentale ici

$$\forall t \in [-1, 1], P'(t)^2 = 0.$$

P' possède donc une infinité de racines : P' est ainsi le polynôme nul, d'où P est constant.

Or $P(0) = 0$ et ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

Finalement φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Posons $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$. ψ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

   On a $F = \mathrm{Ker}(\psi)$, F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ donc un sous-espace vectoriel de dimension 2.

   La famille $(X-1, (X-1)^2)$ est une famille de F, elle est libre car échelonnée en degrés. Il s'agit d'une famille libre de cardinal 2 dans F qui est de dimension 2, c'est donc une base de F.

(b) On va appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base obtenue précédemment.

On a $\varphi(X-1,X-1)=(-1)^2+\displaystyle\int_{-1}^{1}1^2\,\mathrm{d}t=3$. On pose alors $P_1=\dfrac{X-1}{\sqrt{3}}$

On a

$$\varphi((X-1)^2,P_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi((X-1)^2,X-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1+\int_{-1}^{1}2t-2\,\mathrm{d}t\right)=\frac{-5}{\sqrt{3}}$$

D'où

$$(X-1)^2-\varphi((X-1)^2,P_1)P_1=(X-1)^2+\frac{5}{3}(X-1)$$

Puis

$$\begin{aligned}\varphi((X-1)^2+\frac{5}{3}(X-1),(X-1)^2+\frac{5}{3}(X-1))&=\frac{4}{9}+\int_{-1}^{1}\left(2t-2+\frac{5}{3}\right)^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{9}+\int_{-1}^{1}4t^2-\frac{4}{3}t+\frac{1}{9}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{9}+\frac{8}{3}+\frac{2}{9}\\&=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

On pose alors $P_2=\sqrt{\dfrac{3}{10}}\left((X-1)^2+\dfrac{5}{3}(X-1)\right)$

(c) Notons, pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $\|P\|^2=\varphi(P,P)$.

D'après le cours on sait que $d(X^2,F)=\|X^2-p_F(X^2)\|$.

Or, puisque $X^2-p_F(X^2)$ et $p_F(X^2)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore nous assure que $\|X^2\|^2=\|X^2-p_F(X^2)\|^2+\|p_F(X^2)\|^2$ et donc

$$d(X^2,F)^2=\|X^2\|^2-\|p_F(X^2)\|^2$$

Comme (P_1,P_2) est une base orthonormée de F on a $p_F(X^2)=\varphi(X^2,P_1)P_1+\varphi(X^2,P_2)P_2$. Puisque P_1 et P_2 sont orthogonaux, le théorème de Pythagore nous assure alors que

$$\|p_F(X^2)\|^2=\|\varphi(X^2,P_1)P_1\|^2+\|\varphi(X^2,P_2)P_2\|^2=\varphi(X^2,P_1)^2+\varphi(X^2,P_1)^2$$

Pythagore

Exploiter autant que possible le théorème de Pythagore ici va nous permettre de simplifier beaucoup les calculs à faire pour obtenir le résultat final.

Ainsi

$$d(X^2,F)^2=\|X^2\|^2-\varphi(X^2,P_1)^2-\varphi(X^2,P_1)^2$$

Or

$$\|X^2\|^2=0^2+\int_{-1}^{1}4t^2\,\mathrm{d}t=\frac{8}{3}$$

$$\varphi(X^2,P_1)=0\times(-1)+\int_{-1}^{1}\frac{2}{\sqrt{3}}t\,\mathrm{d}t=0$$

$$\begin{aligned}\varphi(X^2,P_2)&=0\times(-1)+2\sqrt{\frac{3}{10}}\int_{-1}^{1}t\left(2t-2+\frac{5}{3}\right)\,\mathrm{d}t\\&=2\sqrt{\frac{3}{10}}\int_{-1}^{1}2t^2-\frac{t}{3}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{10}}=\frac{8}{\sqrt{30}}\end{aligned}$$

D'où

$$d(X^2,F)^2=\frac{8}{3}-0^2-\frac{64}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

Et donc $d(X^2,F)=\sqrt{\dfrac{8}{15}}$.

Corrigé de l'exercice 17

On a $P = \text{Vect}((1,-2,0),(1,0,-2))$. La famille $((1,-2,0),(1,0,-2))$ est libre, c'est donc une base de P.

On lui applique le procédé de Gram-Schmidt. Posons $a = \dfrac{(1,-2,0)}{\|(1,-2,0)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$.

Puis on pose

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(1,0,-2) - \langle (1,0,-2), a\rangle a}{\|(1,0,-2) - \langle (1,0,-2), a\rangle a\|} \\
&= \frac{(1,0,-2) - \frac{1}{5}(1,-2,0)}{\left\|(1,0,-2) - \frac{1}{5}(1,-2,0)\right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{5}(4,2,-10)}{\frac{1}{5}\|(4,2,-10)\|} \\
&= \frac{(4,2,-10)}{\sqrt{120}} \\
&= \frac{(2,1,-5)}{\sqrt{30}}
\end{aligned}$$

Pour déterminer la projection orthogonale sur P il va être plus facile de déterminer la projection orthogonale sur $P^\perp$.

On a $P^\perp = \text{Vect}((2,1,1))$, ainsi $c = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$ est une base orthonormée de $P^\perp$.

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a alors $p_{P^\perp}((x,y,z)) = \langle (x,y,z), c\rangle c = \dfrac{1}{6}(4x+2y+2z, 2x+y+z, 2x+y+z)$.

Ainsi, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{P^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p_P) = I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{P^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

De même

$$p_P(v) = v - p_{P^\perp(v)} = (1,-3,2) - \frac{1}{6}(2,1,1) = \frac{1}{6}(4,-19,13)$$

Corrigé de l'exercice 18

On a $P^\perp = \text{Vect}((1,1,1,1),(1,2,3,4))$.

Par orthonormalisation de Gram-Schmidt on en déduit que $\left(\dfrac{1}{2}(1,1,1,1), \dfrac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3)\right)$ est une base orthonormée de $P^\perp$.

Notons s la symétrie orthogonale par rapport à P, on a $s = p_P - p_{P^\perp} = \text{Id} - p_{P^\perp} - p_{P^\perp} = \text{Id} - 2p_{P^\perp}$

Or, pour $(x,y,zt) \in \mathbb{R}^4$ on a

$$\begin{aligned}
p_{P^\perp}(u) &= \langle u, \frac{1}{2}(1,1,1,1)\rangle \frac{1}{2}(1,1,1,1) + \langle u, \frac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3)\rangle \frac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3) \\
&= \frac{x+y+z+t}{4}(1,1,1,1) + \frac{-3x-y+z+3t}{20}(-3,-1,1,3) \\
&= \frac{1}{20}\left(14x+8y+2z-4t, 8x+6y+4z+2t, 2x+4y+6z+8t, -4x+2y+8z+14t\right)
\end{aligned}$$

D'où, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{P^\perp}) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -4 & 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = I_4 - 2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{P^\perp}) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & -16 & -4 & 8 \\ -16 & 8 & -8 & -4 \\ -4 & -8 & 8 & -16 \\ 8 & -4 & -16 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 19

1. On va montrer par une récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de degré n

   Initialisation :

   D'après l'énoncé, pour $n \in \{0, 1\}$, H_n est bien de degré n

   Hérédité :

   Soit $n \geqslant 1$. On suppose que H_n est de degré n de monôme dominant $a_n X^n$ et que H_{n-1} est de degré $n-1$.

   Ainsi H_n peut s'écrire $H_n = a_n X^n + Q_n(X)$ où Q_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$.

   On a alors
   $$H_{n+1} = 2XH_n(X) - H_{n-1}(X) = 2a_n X^{n+1} + 2XQ_n - H_{n-1}$$

   $2XQ_n(X) - H_{n-1}(X)$ est une somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n, son degré est donc inférieur ou égal à n.

   On a donc écrit H_{n+1} sous la forme d'un monôme de degré $n+1$: $2a_n X^{n+1}$, plus un polynôme de degré strictement plus petit que $n+1$. Son degré est alors $n+1$

   On a ainsi prouvé par récurrence que, pour tout entier n, H_n est un polynôme de degré n.

2. On va procéder par récurrence double sur n

   Initialisation :

   Pour $n = 0$ et $n = 1$ on a, de manière évidente
   $$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad H_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout réel θ, on a
   $$H_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad H_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n-1)\theta)$$

   Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors
   $$\begin{aligned} H_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)H_n(\cos(\theta)) - H_{n-1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

   On a ainsi montré par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad H_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

3. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est impropre en -1 et en 1.

La fonction PQ est continue sur $[-1,]$, donc d'après le théorème des bornes de Weierstrass, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [-1,1], \qquad |P(t)Q(t)| \leqslant M$$

Ainsi

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}$$

Étudions d'abord l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ Au voisinage de 1^- on a

$$\frac{M}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{M}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{M}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.

Intégrale de Riemann en x_0

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a < x_0 < b$, les intégrales $\displaystyle\int_{x_0}^b \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{x_0} \frac{1}{(x_0-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Ainsi, par théorème de comparaison pour les intégrales des fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Par majoration on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

On procède mutatis mutandis pour étudier l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Finalement pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Notons $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

- Soit λ un réel et soit P, Q et R trois éléments de $\mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned}\langle P,Q+\lambda R\rangle &= \int_{-1}^1 P(t)\left(Q(t)+\lambda R(t)\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^1 \left(P(t)Q(t)+\lambda P(t)R(t)\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-1}^1 P(t)R(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \langle P,Q\rangle + \lambda\langle P,R\rangle\end{aligned}$$

  Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est linéaire à droite
- Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, on a alors

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 Q(t)P(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle Q,P\rangle$$

  Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est symétrique, comme elle est linéaire à droite elle est donc aussi linéaire à gauche.
- Soit $P \in R[X]$, on a

$$\forall t \in]-1,1[, P(t)^2\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$$

  Ainsi, par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

  Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est positive
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\langle P,P\rangle = 0$. On sait que

$$\forall t \in]-1,1[, P(t)^2\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$$

et que la fonction $t \mapsto P(t)^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est *continue* sur $]-1,1[$.

Une fonction continue et positive d'intégrale nulle est nulle sur l'intervalle d'intégration, ainsi

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad P(t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

D'où,

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad P(t) = 0$$

P admet donc une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, c'est-à-dire $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ainsi l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est définie positive.

Finalement l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ deux entiers naturels distincts. On va ici calculer $\langle H_n, H_m\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{H_m(t)H_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

On va considérer le changement de variable $t = \cos(x)$. Soit $\psi \ : \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$.

ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante sur $]0,\pi[$, le changement de variable est donc licite. Pour $x \in]0,\pi[$ on a $\psi'(x) = -\sin(x)$.

De plus, pour $x \in]0,\pi[$ on a $\sin(x) \geqslant 0$ ainsi

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad \sin(x) = \sqrt{\sin(x)^2} = \sqrt{1-\cos(x)^2} = \sqrt{1-\psi(x)^2}$$

D'où

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad \psi'(x) = -\sqrt{1-\psi(x)^2}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle H_n, H_m\rangle &= \int_{-1}^{1} H_n(t)H_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} H_n(\psi(x))H_m(\psi(x))\frac{1}{\sqrt{1-\psi(x)^2}}\psi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\pi}^{0} H_n(\cos(x))H_m(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} H_n(\cos(x))H_m(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((n+m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi les polynômes H_n et H_m sont bien orthogonaux.

La famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour notre produit scalaire.

> **Classique !**
> Les polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cet exercice sont les polynômes de Tchebychev de première espèce. On les voit revenir régulièrement dans des nombreux problèmes, il est donc bon de les avoir étudiés au moins une fois.

Corrigé de l'exercice 20

Le problème revient à calculer la distance de $t \mapsto t^2$ à $\mathrm{Vect}(t \mapsto -\cos(t), t \mapsto -1)$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

Cette distance est atteinte pour le projeté orthogonal de $t \mapsto t^2$ sur $\mathrm{Vect}(t \mapsto -\cos(t), t \mapsto -1)$

La famille $(t \mapsto \cos(t), t \mapsto 1)$ est orthogonale pour notre produit scalaire, il n'y a plus qu'à la renormaliser.

On a
$$\int_0^\pi \cos(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, la famille $\left(t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t), t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(t \mapsto \cos(t), t \mapsto 1)$

On a
$$\int_0^\pi t^2 \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{3\sqrt{\pi}}$$
et, via deux intégrations par parties,
$$\int_0^\pi t^2 \times \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2\sqrt{2\pi}$$

Le projeté orthogonal de de $t \mapsto t^2$ sur $\mathrm{Vect}(t \mapsto -\cos(t), t \mapsto -1)$ est alors
$$t \mapsto -2\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t) + \frac{\pi^3}{3\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}} = -4\cos(t) + \frac{\pi^2}{3}$$
Ainsi
$$\min_{x,y\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t^2 + x\cos(t) + y)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(t^2 - \left(-4\cos(t) + \frac{\pi^2}{3}\right)\right)^2\,\mathrm{d}t$$
Finalement $I(x,y)$ est minimale pour $x = 4$ et $y = -\frac{\pi^2}{3}$.

Corrigé de l'exercice 21

1. On a $F = \mathrm{Vect}((2,-1,0),(2,0,-1))$. La famille $((2,-1,0),(2,0,-1))$ est libre, c'est donc une base de F.

   On lui applique le procédé de Gram-Schmidt. Posons $u = \frac{(2,-1,0)}{\|(2,-1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$.

   Puis on pose
$$\begin{aligned} v &= \frac{(2,0,-1) - \langle(2,0,-1),u\rangle u}{\|(2,0,-1) - \langle(2,0,-1),u\rangle u\|} \\ &= \frac{(2,0,-1) - \frac{4}{5}(2,-1,0)}{\|(2,0,-1) - \frac{4}{5}(2,-1,0)\|} \\ &= \frac{\frac{1}{5}(2,4,-5)}{\|\frac{1}{5}(2,4,-5)\|} \\ &= \frac{(2,4,-5)}{\sqrt{45}} \end{aligned}$$

   Ainsi $(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \frac{(2,4,-5)}{\sqrt{45}}\right)$ est une base orthonormée de F.

   On a de plus $F^\perp = \mathrm{Vect}((1,2,2))$. Ainsi $w = \frac{(1,2,2)}{3}$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

   Finalement $(u,v,w) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \frac{(2,4,-5)}{\sqrt{45}}, \frac{(1,2,2)}{3}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Elle est de plus adaptée à la somme directe orthogonale $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$.
2. Notons $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$, on a alors
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad p_{F^\perp}((x,y,z)) = \langle (x,y,z), w\rangle w = \frac{x+2y+2z}{9}(1,2,2)$$

   Ainsi, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

D'où
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = I_4 - \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$
Et
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = I_4 - 2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Notons $\mathcal{B} = (u, v, w)$ la base obtenue à la question 1.. Alors, comme cette base est adaptée à la somme directe orthogonale $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Et
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 22

1. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\langle \lambda A+B, C\rangle = \mathrm{Tr}((\lambda A + B)^\top C) = \mathrm{Tr}(\lambda A^\top C + B^\top C) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A^\top C) + \mathrm{Tr}(B^\top C) = \lambda\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle.$$
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \mathrm{Tr}\left((A^\top B)^\top\right) = \mathrm{Tr}(B^\top A) = \langle B, A\rangle.$$
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, donc bilinéaire symétrique.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors
$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \left(A^\top A\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A^\top)_{i,j} A_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 \geqslant 0.$$
Et une somme de carrés étant nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, il vient alors
$$\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$
Et donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Il s'agit de prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Nous avons déjà vu dans un TD précédent que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors
$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$
D'autre part, pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\langle A, S\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^\top S\right) = -\,\mathrm{Tr}(AS) = -\,\mathrm{Tr}(SA) = -\,\mathrm{Tr}(S^\top A) = -\langle S, A\rangle = -\langle A, S\rangle.$$
On en déduit que $\langle A, S\rangle = 0$. Et donc toute matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale à toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
Ces deux espaces étant de même dimension : ils sont égaux, et donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a
$$M = \underbrace{\frac{M+M^\top}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{M-M^\top}{2}}_{\text{antisymétrique}}$$
Ici
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}$$

4. Montrer que φ est une symétrie orthogonale revient à montrer que $\varphi^2 = \mathrm{Id}$ (i.e. φ est une symétrie) et que $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux.

   Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a
$$\begin{aligned} \varphi^2(M) &= \varphi\left(M - 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A\right) \\ &\varphi(M) - 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}\varphi(A) \\ &= \varphi(M) - 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}\left(A - 2\frac{\mathrm{Tr}(A^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A\right) \\ &= \varphi(M) + 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A \\ &= M \end{aligned}$$

   On a donc bien $\varphi^2 = \mathrm{Id}$

   Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a
$$\begin{aligned} \varphi(M) = M \quad &\Leftrightarrow \quad M - 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A = M \\ &\Leftrightarrow \quad 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(M^\top A) = 0 \qquad \text{car } A \text{ non nulle} \\ &\Leftrightarrow \quad \langle M, A\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad M \in \mathrm{Vect}(A)^\perp \end{aligned}$$
   Et
$$\begin{aligned} \varphi(M) = -M \quad &\Leftrightarrow \quad M - 2\frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A = -M \\ &\Leftrightarrow \quad M = \frac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A \end{aligned}$$

   Ainsi $M \in \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ implique $M \in \mathrm{Vect}(A)$, on en déduit donc $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Vect}(A)$.

   De plus $\varphi(A) = -A$ donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$.

   Finalement $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(A)$.

   Puisque $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux on en déduit que φ est bien une symétrie orthogonale. C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(A)^\perp$

   On aurait pu être plus malins :

   Posons $B = \dfrac{1}{\sqrt{\langle A, A\rangle}}A = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}}A$. B est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(A)$

   Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\dfrac{\mathrm{Tr}(M^\top A)}{\mathrm{Tr}(A^\top A}A = \dfrac{\langle M, A\rangle}{\langle A, A\rangle}A = \langle M, B\rangle B$

On reconnait là le projeté orthogonal de M sur $\mathrm{Vect}(A)$. φ est alors $\mathrm{Id} - 2p_{\mathrm{Vect}(A)}$, c'est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(A)^{\perp}$

Corrigé de l'exercice 23

1. Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\langle P + \lambda Q, R\rangle &= \sum_{i=0}^{2} (P + \lambda Q)^{(k)}(0) R^{(k)}(0) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \left(P^{(k)}(0) + \lambda Q^{(k)}(0)\right) R^{(k)}(0) \\ &= \sum_{i=0}^{2} P^{(k)}(0)R^{(k)}(0) + \lambda \sum_{i=0}^{2} Q^{(k)}(0)R^{(k)}(0) \\ &= \langle P, R\rangle + \lambda\langle Q, R\rangle\end{aligned}$$

Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, alors

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{2} Q^{(k)}(0)P^{(k)}(0) = \langle Q, P\rangle$$

L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc symétrique. Puisqu'elle est linéaire à gauche et symétrique elle est donc aussi linéaire à droite et ainsi elle est bilinéaire.

Soit $P \in R_n[X]$, on a alors $\langle P, P\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \left(P^{(k)}(0)\right)^2 \geqslant 0$.

L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc une forme bilinéaire positive.

Soit enfin $P \in R_2[X]$ telle que $\langle P, P\rangle = 0$, on a alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{2} \left(P^{(k)}(0)\right)^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ainsi

$$\forall k \in [\![0, 2]\!], \qquad P^{(k)}(0) = 0$$

Or, d'après la formule de Taylor pour les polynômes on a

$$P = \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{0}{k!} X^k = 0$$

Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Finalement l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire définie positive sur $R_n[X]$, c'est-à-dire un produit scalaire.

2. Soit $i \in [\![0, 2]\!]$ et $P = X^i$, on a alors, pour $k \in [\![0, 2]\!]$

$$P^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Ainsi

$$P^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ i! & \text{si } k = i \end{cases}$$

Soit $j \in [\![0, 2]\!]$ avec $j \neq i$ et $Q = X^j$, alors

$$Q^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ j! & \text{si } k = j \end{cases}$$

Et donc, puisque $i \neq j$
$$\forall k \in [\![0,2]\!], \qquad P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = 0$$
Ainsi
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = 0$$
La base canonique est bien une famille orthogonale.

Du calcul précédent on déduit aussi que, si $P = X^i$ alors $\langle P, P\rangle = P^{(i)}(0)^2 = i!^2$, ainsi $\|P\| = i!$.

La famille $\mathcal{C} = \left(1, X, \dfrac{X^2}{2}\right)$, obtenue en renormalisant la base canonique est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On a, pour $P \in E$ $f \circ f(P) = P(1-(1-X)) = P(X)$. Ainsi $f^2 = \mathrm{Id}$.

   f est donc un automorphisme de E d'inverse $f^{-1} = f$. f est plus précisément une symétrie
4. f est une symétrie, c'est une symétrie orthogonale si $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux.

   Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on a
$$f(aX^2 + bX + c) = a(1-X)^2 + b(1-X) + c = aX^2 + (-2a - b)X + a + b + c$$
   Ainsi, en identifiant les coefficients, $f(aX^2 + bX + c) = aX^2 + bX + c$ si et seulement si $-2a - b = b$ et $a + b + c = c$ donc si seulement si $a = -b$.

   On a donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, X^2 - X)$

   De même en identifiant les coefficients, $f(aX^2 + bX + c) = -(aX^2 + bX + c)$ si et seulement si $a = -a$, $-2a - b = -b$ et $a + b + c = -c$ donc si seulement si $a = 0$ et $b = -2c$.

   On a donc $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(2X - 1)$

   $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle 2X - 1, 1\rangle = 0$ et $\langle 2X - 1, X^2 - X\rangle = 0$.

   Or $\langle 2X - 1, 1\rangle = -1 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 0 = -1 \neq 0$.

   Ainsi f n'est pas une symétrie orthogonale.